BOCA
BOLETIM DE CONJUNTURA

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA DE OTIMIZAÇÃO DA POTÊNCIA EM SISTEMAS DE PROPULSÃO HÍBRIDA

MATHEMATICAL MODELING IN THE TEACHING OF DIFFERENTIAL CALCULUS: A DIDACTIC PROPOSAL FOR POWER OPTIMIZATION IN HYBRID PROPULSION SYSTEMS

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA DE OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA EN SISTEMAS DE PROPULSIÓN HÍBRIDA

https://doi.org/10.56238/bocav25n83-031

Data de submissão: 27/09/2026 **Data de publicação:** 27/10/2026

Jefferson Bento de Moura
Doutor em Educação. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica
Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) - Campus Cuiabá Octayde Jorge da Silva
E-mail: professor.je@gmail.com

André Rubens Lima
Mestrado em Ciências em Matemática. Professor
Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) - Campus São Vicente
E-mail: andre.rubens.7@gmail.com

RESUMO
Este artigo tem por objetivo analisar as potencialidades didático-matemáticas de uma proposta de Modelagem Matemática para o ensino de derivadas e otimização em cursos de Engenharia, tomando como situação problematizadora a relação entre torque, rotação e potência em sistemas de propulsão híbrida. A investigação é teórico-dedutiva, fundamentada em literatura de Modelagem Matemática na Educação Matemática e em resultados clássicos do Cálculo e da Análise. A partir de $P(n) = (\pi/30)nT(n)$, estabelecem-se condições diferenciais para extremos e demonstra-se que um máximo interior positivo do torque não coincide com um máximo local da potência. Para um modelo aditivo simplificado, demonstra-se que $\max_D(P_E + P_C) \leq \max_D P_E + \max_D P_C$, com igualdade precisamente quando há um maximizador comum. Um exemplo quadrático permite investigar a não simultaneidade dos máximos. Como contribuição educacional, apresenta-se um percurso de problematização, matematização, investigação de conjecturas e interpretação dos resultados, distinguindo resultados matemáticos demonstrados de possibilidades de aprendizagem ainda não verificadas empiricamente.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Ensino de Cálculo. Derivadas. Otimização.

ABSTRACT
This article analyzes the didactic and mathematical potential of a mathematical modeling proposal for teaching derivatives and optimization in engineering courses, using the relationship between torque, rotational speed, and power in hybrid propulsion systems as a problem situation. The study follows a theoretical-deductive approach grounded in mathematical modeling research in mathematics education and classical results from calculus and analysis. Starting from $P(n) = (\pi/30)nT(n)$, differential conditions for extrema are established, showing that a positive interior maximum of torque does not coincide with a local maximum of power. For a simplified additive model, the inequality $\max_D(P_E + P_C) \leq \max_D P_E + \max_D P_C$ is demonstrated, with equality if and only if a common maximizer exists. A quadratic example supports the investigation of non-simultaneous maxima. The educational contribution is a sequence involving problematization, mathematization, conjecture testing, and interpretation, while distinguishing proven mathematical results from learning possibilities not yet empirically assessed.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Calculus Teaching. Derivatives. Optimization.

RESUMEN
Este artículo tiene como objetivo analizar las potencialidades didáctico-matemáticas de una propuesta de Modelización Matemática para la enseñanza de derivadas y optimización en cursos de Ingeniería, tomando como situación problematizadora la relación entre par motor (torque), rotación y potencia en sistemas de propulsión híbrida. La investigación es de carácter teórico-deductivo, fundamentada en la literatura sobre Modelización Matemática en Educación Matemática y en resultados clásicos del Cálculo y del Análisis. A partir de la expresión P(n)=(π/30)nT(n), se establecen condiciones diferenciales para los extremos y se demuestra que un máximo interior positivo del par motor no coincide con un máximo local de la potencia. Para un modelo aditivo simplificado, se demuestra que max_D (P_E+P_C)≤max_D P_E+max_D P_C, dándose la igualdad precisamente cuando existe un maximizador común. Un ejemplo cuadrático permite investigar la no simultaneidad de los máximos. Como contribución educativa, se presenta un recorrido que abarca la problematización, la matematización, la investigación de conjeturas y la interpretación de los resultados, distinguiendo entre los resultados matemáticos demostrados y aquellas posibilidades de aprendizaje que aún no han sido verificadas empíricamente.

Palabras clave: Educación Matemática. Modelización Matemática. Enseñanza del Cálculo. Derivadas. Optimización.

1 INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática pode ser compreendida como um processo de tradução, organização e investigação de situações provenientes da realidade ou de outras áreas do conhecimento por meio da linguagem matemática. Em Bassanezi (2002), modelar envolve selecionar variáveis, formular hipóteses, estabelecer relações e interpretar resultados; portanto, a simplificação não constitui necessariamente uma fragilidade, desde que seja coerente com o objetivo do modelo. Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014) reforçam esse caráter investigativo ao tratar o modelo como construção passível de exploração, análise e reformulação.

No âmbito da Educação Matemática, o interesse desloca-se do modelo como produto final para os processos de aprendizagem que sua construção pode desencadear. Chaves e Espírito Santo (2008) destacam possibilidades de organizar situações nas quais conhecimentos matemáticos são mobilizados para compreender problemas contextualizados. Burak (2016), por sua vez, enfatiza problematização e investigação como componentes capazes de favorecer participação intelectual do estudante. Tambarussi (2026), ao discutir diferentes modos de compreender a Modelagem na Matemática Aplicada e na Educação Matemática, permite distinguir a busca de fidelidade descritiva de um fenômeno da finalidade educacional de produzir significados matemáticos.

A ideia deste artigo surgiu diretamente de uma aula ministrada no curso de Engenharia Elétrica, no componente curricular Cálculo Diferencial e Integral I, com o propósito de trabalhar aplicações de derivadas. Ao discutir torque, rotação e potência em um veículo híbrido, emergiu uma questão didaticamente fértil: por que as potências máximas individuais de duas fontes de propulsão não devem ser simplesmente somadas para determinar a potência máxima combinada do sistema? A situação mostrou-se adequada para articular regra do produto, taxa de variação, pontos críticos, máximos e interpretação de funções em um contexto tecnológico próximo à formação em Engenharia.

Do ponto de vista matemático, a desigualdade entre o máximo de uma soma e a soma dos máximos é um fato clássico da Análise e da Otimização, decorrente das propriedades do supremo e do máximo (LIMA, 2016; STEWART, 2016). Não se reivindica originalidade para esse resultado. A contribuição do trabalho é didático-matemática: transformar esse fato em objeto de investigação, articulá-lo à dinâmica torque-potência e organizar uma sequência em que a intuição inicial do estudante possa ser confrontada com condições matemáticas precisas.

O objetivo é desenvolver uma formulação analítica elementar para a relação entre torque, rotação e potência; estabelecer condições diferenciais para extremos; caracterizar a potência máxima

em um modelo híbrido aditivo simplificado; e analisar as potencialidades e limitações dessa modelagem para o ensino-aprendizagem de Cálculo em cursos de Engenharia. A contextualização automotiva é deliberadamente simplificada, pois sistemas híbridos reais envolvem arquitetura de powertrain, conversores, transmissão, bateria, máquinas elétricas, perdas e estratégias de controle (EHSANI et al., 2018).

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo possui natureza teórico-dedutiva e finalidade didático-matemática. Não se trata de pesquisa experimental sobre desempenho automotivo nem de investigação empírica da aprendizagem. O ponto de partida é uma situação de ensino efetivamente utilizada em Cálculo Diferencial e Integral I, posteriormente reorganizada como objeto de análise matemática e didática.

O percurso metodológico foi estruturado em quatro movimentos articulados. No primeiro, realizou-se a problematização da relação entre torque, rotação e potência, preservando apenas as grandezas necessárias ao objetivo de ensino. No segundo, procedeu-se à matematização da situação por meio da relação $P=T\omega$ e de sua expressão em função da rotação. No terceiro, foram empregados resultados elementares do Cálculo e da Análise: Continuidade, Teorema de Weierstrass, Teorema de Fermat, regra do produto e teste da segunda derivada, para estabelecer condições de existência e caracterização de máximos. No quarto, os resultados foram reinterpretados do ponto de vista didático, examinando-se como a situação pode favorecer conjectura, confronto entre intuição e formalização, análise paramétrica e construção de significado.

Essa organização é coerente com Bassanezi (2002), para quem a Modelagem envolve a passagem de uma situação de referência à formulação matemática e à interpretação dos resultados. Ao mesmo tempo, aproxima-se da perspectiva educacional de Burak (2016), na medida em que a problematização e a investigação assumem função estruturante. Assim, a metodologia não pretende validar um modelo físico de powertrain, mas analisar a consistência matemática de um modelo simplificado e sua produtividade como situação de ensino.

Os valores numéricos utilizados na aplicação 135 cv, 204 cv e 224 cv são tratados exclusivamente como parâmetros ilustrativos do material didático que motivou o estudo (MOURA, 2026). A validade dos resultados do artigo decorre das demonstrações matemáticas apresentadas, e não da correspondência desses valores com medições experimentais.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA RELAÇÃO ENTRE TORQUE E POTÊNCIA

A relação mecânica fundamental entre potência, torque e velocidade angular é

$$P = T\omega \qquad (1)$$

em que P representa a potência, T o torque e ω a velocidade angular.

Se n representa a rotação em rotações por minuto (rpm), então

$$\omega(n) = 2\pi n/60 = \pi n/30 \qquad (2)$$

e, portanto,

$$P(n) = (\pi/30)nT(n). \qquad (3)$$

Quando T é medido em N·m e n em rpm, a expressão fornece P em watts. A equação (3) evidencia que a potência depende simultaneamente da rotação e do comportamento da função torque.

Hipóteses do modelo

Seja $I=[n_0,n_1]\subset(0,+\infty)$ um intervalo compacto de rotações.

Definição 2.1. Chama-se função torque uma aplicação $T:I\to\mathbb{R}_+$ que associa a cada rotação n o torque T(n).

Definição 2.2. Associada à função torque T, define-se a função potência $P:I\to\mathbb{R}_+$ por $P(n)=knT(n)$, com $k=\pi/30>0$.

Proposição 2.3. Se $T:I\to\mathbb{R}_+$ é contínua, então existe $nP\in I$ tal que $P(nP)=\max_{n\in I} P(n)$.

Demonstração. Como T é contínua e $n\mapsto n$ também é contínua, $P(n)=knT(n)$ é contínua em I. Como I é compacto, o Teorema de Weierstrass garante que P atinge máximo e mínimo absolutos em I (LIMA, 2016).

4 CARACTERIZAÇÃO DIFERENCIAL DA POTÊNCIA MÁXIMA

Assuma-se $T\in C^1(I)$. Derivando (3) pela regra do produto, obtém-se

$$P'(n) = k[T(n) + nT'(n)]. \qquad (4)$$

Como $k>0$, o sinal de $P'(n)$ é determinado por $T(n)+nT'(n)$. Em termos didáticos, esse ponto é relevante porque a derivada deixa de aparecer apenas como resultado de uma regra operatória e passa a indicar como duas grandezas relacionadas contribuem para o crescimento ou decrescimento da potência. Essa passagem da manipulação simbólica à interpretação é compatível com a função atribuída à matematização em Bassanezi (2002): utilizar relações matemáticas para compreender o comportamento da situação modelada.

Condição necessária de primeira ordem

Proposição 3.1. Se $n^* \in \text{int}(I)$ é ponto de extremo local da função potência, então $T(n^*)+n^*T'(n^*)=0$. Equivalentemente, $T'(n^*)=-T(n^*)/n^*$.

Demonstração. Como n^* é um extremo local interior de uma função diferenciável, o Teorema de Fermat fornece $P'(n^*)=0$ (LIMA, 2016; STEWART, 2016). Substituindo em (3.1) e usando $k>0$ e $n^*>0$, seguem as duas identidades. Se $T(n^*)>0$, então $T'(n^*)<0$; logo, em um extremo interior da potência com torque positivo, o torque já se encontra em regime decrescente.

4.1 RELAÇÃO ENTRE O MÁXIMO DO TORQUE E O MÁXIMO DA POTÊNCIA

Proposição 3.2. Se $nT \in \text{int}(I)$ é um ponto de máximo local da função torque, com $T(nT)>0$ e $T'(nT)=0$, então $P'(nT)=kT(nT)>0$. Consequentemente, nT não é ponto de máximo local da potência.

Demonstração. Pela equação (3.1), $P'(nT)=k[T(nT)+nT\,T'(nT)]=kT(nT)>0$. Como uma função diferenciável que possui extremo local em ponto interior deve ter derivada nula nesse ponto, a contrapositiva do Teorema de Fermat exclui nT como extremo local de P.

Observação 3.3. O resultado formaliza uma interpretação importante para a aprendizagem: o torque pode começar a diminuir enquanto a potência ainda cresce, porque o aumento da velocidade angular pode compensar, em determinada faixa, a redução do torque. A situação permite que o estudante atribua significado ao sinal da derivada e à regra do produto a partir da relação entre grandezas, em vez de restringir a atividade à obtenção algébrica de P'.

Condição suficiente de segunda ordem

Suponha agora $T \in C^2(I)$. Derivando novamente,

$$P''(n) = k[2T'(n) + nT''(n)]. \qquad (5)$$

Proposição 3.4. Se $n^* \in \text{int}(I)$ satisfaz $T(n^*)+n^*T'(n^*)=0$ e $2T'(n^*)+n^*T''(n^*)<0$, então n^* é ponto de máximo local estrito da potência.

Demonstração. A primeira condição fornece $P'(n^*)=0$; a segunda implica $P''(n^*)<0$. O resultado segue do teste da segunda derivada (LIMA, 2016; STEWART, 2016).

4.2 EXEMPLO ANALÍTICO

Exemplo 3.5. Considere $T(n)=a-bn$, com $a>0$ e $b>0$, em um intervalo no qual $T(n)>0$. A potência correspondente é $P(n)=k(an-bn^2)$, de modo que $P'(n)=k(a-2bn)$. O único ponto crítico é $n^*=a/(2b)$, e $P''(n)=-2kb<0$. Portanto, n^* é máximo local estrito. Nesse ponto, $T(n^*)=a/2$ e $P(n^*)=ka^2/(4b)$. O exemplo é analítico e tem finalidade didática; não representa curva experimental de um veículo específico.

4.3 POTÊNCIA COMBINADA EM SISTEMAS HÍBRIDOS

Seja $D=[d_0,d_1] \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto de estados operacionais admissíveis. O estado $x \in D$ pode representar, por exemplo, velocidade do veículo ou um parâmetro operacional adimensional que permita analisar as fontes em um domínio comum. A hipótese de compacidade, combinada à continuidade das funções, garante a existência dos máximos pelo Teorema de Weierstrass.

Definição 4.1. Sejam $P_E, P_C : D \to \mathbb{R}$ funções contínuas de potência associadas, respectivamente, à fonte elétrica e à fonte a combustão.

Definição 4.2. No modelo aditivo simplificado, define-se $P_H(x)=P_E(x)+P_C(x)$.

A relação é um modelo didático. Em powertrains reais, a potência disponível nas rodas depende de arquitetura, transmissão, conversão eletromecânica, limites elétricos e térmicos e estratégias de gerenciamento (EHSANI et al., 2018).

4.3.1 Máximo da soma e soma dos máximos

Definam-se $M_E=\max_D P_E$ e $M_C=\max_D P_C$. A desigualdade a seguir é uma aplicação elementar da subaditividade do supremo/máximo, fato clássico de Análise Real (LIMA, 2016). Ela é retomada aqui porque constitui a estrutura matemática da situação de ensino.

Teorema 4.3. Se P_E e P_C são contínuas em D compacto, então $\max_D(P_E+P_C) \leq \max_D P_E+\max_D P_C$.

Demonstração. Para todo $x \in D$, $PE(x) \leq ME$ e $PC(x) \leq MC$. Logo $PE(x)+PC(x) \leq ME+MC$. Tomando o máximo em D, obtém-se a desigualdade.

4.3.2 Condição de igualdade

Para $f: D \to \mathbb{R}$ contínua em D compacto, define-se $\operatorname{argmax}_D f = \{x \in D : f(x) = \max_D f\}$.

Teorema 4.4. Sob as hipóteses anteriores, $\max_D(PE+PC) = \max_D PE + \max_D PC$ se, e somente se, $\operatorname{argmax}_D PE \cap \operatorname{argmax}_D PC \neq \varnothing$.

Demonstração. Se existe x^* no conjunto de interseção, então $PE(x^*)=ME$ e $PC(x^*)=MC$, de modo que $PH(x^*)=ME+MC$; pelo Teorema 4.3, esse valor é o máximo. Reciprocamente, suponha por contradição que $\max_D PH = ME+MC$, mas $\operatorname{argmax}_D PE \cap \operatorname{argmax}_D PC = \varnothing$. Seja x^* um maximizador de PH, cuja existência decorre de Weierstrass. Como $PE(x^*) \leq ME$ e $PC(x^*) \leq MC$, a igualdade $PE(x^*)+PC(x^*)=ME+MC$ exige simultaneamente $PE(x^*)=ME$ e $PC(x^*)=MC$, contradizendo a hipótese.

4.3.3 Déficit de simultaneidade

Definição 4.5. Denomina-se, neste trabalho, déficit de simultaneidade a grandeza $\Delta = ME+MC-\max_D(PE+PC) \geq 0$.

Tem-se $\Delta=0$ se, e somente se, as duas funções possuem ao menos um maximizador comum. Quando $ME+MC>0$, define-se a versão adimensional $\delta = \Delta/(ME+MC)$. A grandeza é estritamente matemática: não deve ser interpretada automaticamente como perda física, mecânica ou energética.

4.3.4 Condição diferencial do máximo combinado

Suponham-se $PE, PC \in C^1(D)$. Como $PH=PE+PC$,

$$PH'(x) = PE'(x) + PC'(x). \qquad (6)$$

Proposição 4.6. Se $x^* \in \operatorname{int}(D)$ é ponto de extremo local de PH, então $PE'(x^*)+PC'(x^*)=0$. Se, adicionalmente, $PE, PC \in C^2(D)$ e $PE''(x^*)+PC''(x^*)<0$, então x^* é máximo local estrito de PH. Em termos didáticos, o máximo do sistema não exige que cada subsistema esteja individualmente em seu máximo.

4.3.5 Exemplo com funções quadráticas

Exemplo 4.7. Considere $PE(x)=ME-a(x-\alpha)^2$ e $PC(x)=MC-b(x-\beta)^2$, com $a,b>0$ e $\alpha\neq\beta$. A função combinada é $PH(x)=ME+MC-a(x-\alpha)^2-b(x-\beta)^2$. Seu único ponto crítico é

$$x^* = (a\alpha+b\beta)/(a+b). \qquad (7)$$

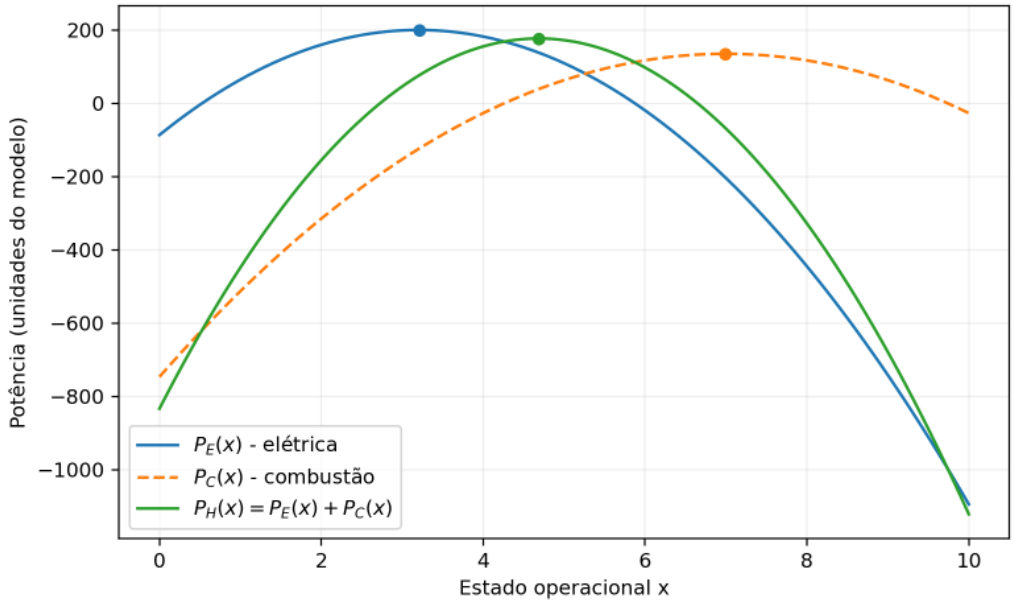
Como $PH''(x)=-2(a+b)<0$, x^* é o único máximo. Se $\alpha<\beta$, então $\alpha<x^*<\beta$, pois x^* é combinação convexa estrita de α e β.

$$PH(x^*) = ME+MC - [ab/(a+b)](\alpha-\beta)^2. \qquad (8)$$

$$\Delta = [ab/(a+b)](\alpha-\beta)^2 > 0. \qquad (9)$$

A expressão permite uma exploração paramétrica: o estudante pode modificar a, b, α e β e observar como curvatura e afastamento entre os maximizadores alteram a resposta combinada. Nesse sentido, o modelo deixa de funcionar apenas como representação pronta e passa a constituir objeto de experimentação matemática, movimento coerente com Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014). A análise de parâmetros favorece a articulação entre derivadas, concavidade, localização de máximos e interpretação funcional.

Figura 1 – Ilustração conceitual dos máximos individuais e do máximo da função combinada no modelo quadrático.



Fonte: Elaboração própria (2026).

5 APLICAÇÃO DIDÁTICA E FINALIDADE DE ENSINO-APRENDIZAGEM

A atividade que originou o estudo foi concebida como exercício de ensino-aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I para Engenharia Elétrica. O propósito não foi estimar experimentalmente a potência de um veículo, mas criar uma situação em que o estudante precisasse interpretar matematicamente grandezas de Engenharia e justificar, com derivadas e máximos de funções, por que máximos individuais não são necessariamente simultâneos.

A finalidade didática, entretanto, não se reduz à contextualização de regras de derivação. O interesse da atividade está em organizar uma trajetória na qual uma expectativa intuitiva — a de que máximos individuais poderiam ser simplesmente adicionados — seja transformada em questão matemática. Na perspectiva de Chaves e Espírito Santo (2008), a situação contextualizada pode participar da produção de significado, em vez de aparecer apenas como ilustração posterior de um conteúdo já formalizado. Aqui, a propulsão híbrida cria a necessidade de distinguir valor máximo, ponto maximizador e simultaneidade.

Na situação didática tomada como referência, foram utilizados como parâmetros ilustrativos 135 cv para a fonte a combustão, 204 cv para a fonte elétrica e 224 cv para a potência combinada de referência. Esses valores são mantidos apenas para documentar a situação pedagógica que motivou a

modelagem. Eles não constituem base experimental do estudo, nem são empregados como evidência de desempenho de um modelo comercial específico.

A soma aritmética dos máximos individuais é 339 cv, e sua diferença em relação ao valor combinado de referência é 115 cv, aproximadamente 33,9% de 339 cv. Essa discrepância não pode ser identificada automaticamente com o déficit Δ da Definição 4.5, pois o cálculo de Δ exige conhecer PE e PC em um mesmo domínio operacional e determinar max_D(PE+PC). Didaticamente, contudo, a discrepância cumpre função produtiva: gera uma pergunta cuja resposta exige abandonar a simples operação aritmética e analisar as funções e seus maximizadores.

Esse confronto entre uma resposta intuitivamente plausível e as condições matemáticas de sua validade aproxima a atividade da problematização destacada por Burak (2016). O possível "erro" de somar diretamente os máximos não precisa ser tratado apenas como resposta incorreta; pode funcionar como hipótese inicial a ser investigada. O estudante é levado a perguntar em que condições a soma seria válida, o que desloca o foco da execução de procedimentos para a análise das hipóteses do problema.

Conforme descrito nos procedimentos metodológicos, a atividade pode ser conduzida em quatro movimentos articulados: interpretação da situação tecnológica; matematização pela relação $P=T\omega$; análise diferencial de P e dos pontos críticos; e interpretação do máximo da soma de funções. Em Bassanezi (2002), a passagem entre situação, modelo e interpretação é constitutiva da própria Modelagem. No contexto deste artigo, esses movimentos procuram fazer com que a derivada seja compreendida como ferramenta para investigar comportamento e otimização, e não apenas como técnica simbólica.

A exploração do modelo quadrático amplia essa finalidade. Ao variar parâmetros e antecipar seus efeitos antes de efetuar os cálculos, o estudante pode formular conjecturas e confrontá-las com as expressões obtidas. Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014) oferecem suporte a essa leitura investigativa do modelo. Tambarussi (2026), ao distinguir modos de compreender a Modelagem, também ajuda a situar a proposta: sua relevância não depende de reproduzir com elevada fidelidade um powertrain real, mas da capacidade de organizar uma experiência de aprendizagem matematicamente consistente.

Assim, a contribuição didática pode ser compreendida em três níveis articulados. No nível conceitual, favorece a compreensão da derivada como instrumento de análise da variação e da otimização. No nível epistemológico, confronta uma inferência intuitiva com as condições que determinam matematicamente sua validade. No nível metodológico, organiza a aprendizagem a partir

de uma situação problematizadora que conduz à matematização e retorna à interpretação. A Modelagem, portanto, não funciona apenas como cenário motivacional, mas participa da organização do conhecimento matemático mobilizado.

5.1 ENCAMINHAMENTO DIDÁTICO PROPOSTO E EVIDÊNCIAS A OBSERVAR

Como desdobramento da análise teórico-dedutiva, propõe-se uma sequência de quatro momentos, a ser adaptada ao tempo disponível e aos conhecimentos prévios da turma. Trata-se de um *encaminhamento de ensino*, e não de uma intervenção cuja eficácia já tenha sido mensurada.

Momento 1 — Problematização e conjecturas. Apresentam-se as potências máximas ilustrativas de duas fontes e um valor combinado de referência. Antes de calcular, solicita-se que os estudantes explicitem por escrito se esperam que a potência máxima conjunta corresponda à soma dos valores máximos individuais. O registro inicial permite identificar a distinção, ou sua ausência, entre valor máximo e estado operacional em que o máximo ocorre.

Momento 2 — Matematização das grandezas. Os estudantes relacionam torque, velocidade angular e potência, obtendo $P(n) = (\pi/30)nT(n)$. A análise de unidades e das hipóteses de domínio precede a derivação. Discute-se por que o crescimento da rotação não determina isoladamente o crescimento da potência.

Momento 3 — Investigação diferencial e exploração gráfica. Utilizando a regra do produto, a turma examina $P'(n)$, compara os pontos de máximo de torque e potência e investiga funções quadráticas P_E e P_C. A alteração dos parâmetros a, b, α e β permite formular conjecturas sobre o deslocamento do máximo combinado e verificar a condição de simultaneidade.

Momento 4 — Retorno ao contexto e validação dos argumentos. Solicita-se uma justificativa matemática para a desigualdade entre máximo da soma e soma dos máximos, acompanhada de uma interpretação contextual. Os estudantes devem distinguir o déficit matemático de simultaneidade de perdas físicas de um veículo real.

Em eventual investigação empírica, registros escritos das conjecturas, resoluções, justificativas orais e revisões das respostas iniciais poderiam constituir fontes de dados. Os indicadores de análise incluiriam: compreensão da derivada como taxa de variação; distinção entre máximo e maximizador; uso das hipóteses do modelo; e capacidade de interpretar limites de validade. Nenhum desses efeitos é afirmado aqui como resultado observado.

6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados matemáticos confirmam duas ideias que, embora elementares do ponto de vista da Análise, adquirem relevância quando examinadas como objetos de ensino. A primeira é que torque máximo e potência máxima não precisam ocorrer na mesma rotação. A identidade $P'(n)=k[T(n)+nT'(n)]$ permite observar que, no ponto de máximo interior positivo do torque, $P'(nT)>0$; portanto, a potência ainda cresce. Didaticamente, o resultado desloca a derivada de uma operação exclusivamente algorítmica para uma ferramenta de interpretação do comportamento de grandezas relacionadas. Essa passagem é coerente com Bassanezi (2002), para quem a matematização permite estabelecer relações capazes de interpretar uma situação de referência.

A regra do produto, nesse contexto, ganha uma função conceitual: ela explica por que a redução de uma das grandezas não implica imediatamente redução do produto. Em vez de apenas calcular P', o estudante pode interpretar o termo $T(n)+nT'(n)$ e discutir a contribuição simultânea da rotação e da variação do torque. O conteúdo procedimental permanece necessário, mas é subordinado a uma questão de significado.

A segunda ideia é que o máximo de uma soma não é, em geral, a soma dos máximos. O Teorema 4.4 explicita a condição de igualdade: é necessário que as funções tenham ao menos um maximizador comum. Embora se trate de um fato matemático clássico, sua exploração didática transforma uma aparente contradição “se existem duas potências máximas, por que não somá-las?” em problema de investigação. Esse movimento aproxima-se de Burak (2016), na medida em que a problematização antecede a resposta formal e cria condições para que o estudante formule e examine hipóteses.

A contribuição do artigo, portanto, não consiste em apresentar a subaditividade do máximo como resultado novo, mas em convertê-la em objeto de exploração no ensino de Cálculo. O ganho analítico está em mostrar que a diferença entre máximo da soma e soma dos máximos pode ser discutida simultaneamente em três registros: algébrico, por meio da desigualdade; geométrico, pela localização dos maximizadores; e contextual, pela interpretação das potências individuais e combinada. Essa articulação amplia as possibilidades de construção de significado.

O exemplo quadrático acrescenta uma leitura paramétrica: o maximizador combinado é uma média ponderada dos maximizadores individuais e o déficit $\Delta=[ab/(a+b)](\alpha-\beta)^2$ quantifica, dentro do modelo, o efeito da não simultaneidade. Ao variar curvaturas e a distância entre α e β, o estudante pode investigar regularidades e formular conjecturas. Essa dinâmica aproxima-se da utilização da

Modelagem como estratégia de investigação discutida por Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014), pois o modelo se torna objeto sobre o qual se experimenta matematicamente.

Sob a perspectiva de Chaves e Espírito Santo (2008), a relevância da contextualização está menos na presença de um tema externo à Matemática e mais na possibilidade de esse tema organizar a mobilização dos conceitos. Nesse sentido, a situação da propulsão híbrida não é mero revestimento para exercícios de derivação: ela produz as perguntas que tornam necessárias as noções de taxa de variação, ponto crítico, máximo e simultaneidade.

Tambarussi (2026) contribui para delimitar o estatuto da proposta. Como o objetivo é educacional, o modelo deve ser julgado por sua coerência matemática, pela explicitação de suas hipóteses e pela capacidade de favorecer aprendizagem, e não por uma exigência de reprodução quantitativa de um sistema automotivo específico. Essa distinção evita confundir validação didática do modelo com validação experimental de um powertrain.

Em síntese, os resultados sustentam uma contribuição didático-matemática em que a teoria de Modelagem não aparece apenas como justificativa externa. Ela participa da interpretação do percurso: a situação gera a problematização; a matematização produz relações funcionais; a análise diferencial permite testar conjecturas; e o retorno ao contexto exige interpretar o alcance e os limites dos resultados. É nessa articulação entre problema, formalização, análise e interpretação que se situa a principal contribuição do trabalho para o ensino-aprendizagem de Cálculo.

7 HIPÓTESES E LIMITAÇÕES DO MODELO

O modelo adota funções contínuas e diferenciáveis em intervalos compactos e, para o sistema híbrido, a soma simplificada PH=PE+PC. Essas hipóteses são suficientes para o desenvolvimento matemático proposto, mas não descrevem integralmente um sistema real.

Em veículos híbridos, a potência efetivamente disponível depende da arquitetura do sistema, do acoplamento mecânico, das máquinas elétricas, da bateria, dos conversores de potência, das relações de transmissão, das eficiências e dos limites térmicos e elétricos, além da estratégia de gerenciamento (EHSANI et al., 2018). Por isso, a análise aqui apresentada deve ser compreendida como um toy model didático.

Do ponto de vista educacional, há também uma limitação metodológica importante: o artigo analisa potencialidades didáticas, mas não apresenta dados empíricos de aprendizagem. Assim, afirmações sobre compreensão conceitual, participação ou desenvolvimento de competências devem

ser lidas como objetivos e possibilidades da proposta, não como efeitos já demonstrados. Uma continuidade natural consiste em aplicar a atividade com desenho de pesquisa educacional, produzindo dados sobre estratégias, argumentos, dificuldades e aprendizagens dos estudantes.

Outra extensão possível seria utilizar curvas técnicas verificáveis ou dados experimentais e formular um estado operacional multidimensional $x \in D \subset \mathbb{R}^m$, com $PE, PC : D \to \mathbb{R}$. Nesse caso, uma condição de primeira ordem para um extremo interior seria $\nabla PE(x^*) + \nabla PC(x^*) = 0$. Tal ampliação permitiria aproximar a modelagem matemática do sistema físico sem perder a distinção entre objetivos de Engenharia e objetivos de ensino.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho reorganizou uma situação surgida em aula de Engenharia Elétrica como proposta de Modelagem Matemática para o ensino de derivadas. A partir de $P = T\omega$, obteve-se $P(n) = (\pi/30)nT(n)$ e foram estabelecidas condições diferenciais que permitem interpretar crescimento, pontos críticos e máximos.

Mostrou-se que um máximo interior positivo do torque não coincide com um máximo local da potência e retomou-se, com referência explícita à literatura de Análise, a desigualdade clássica $\max(PE+PC) \leq \max PE + \max PC$. A igualdade ocorre exatamente quando há um maximizador comum. Para o modelo quadrático, obteve-se ainda $\Delta = [ab/(a+b)](\alpha - \beta)^2$.

A principal contribuição é didático-matemática. Ao longo da análise, a Modelagem foi tratada não apenas como contextualização, mas como princípio de organização da atividade: uma situação tecnológica produz a problematização, a matematização torna explícitas as relações relevantes, a análise diferencial permite examinar conjecturas e a interpretação final delimita o significado e o alcance dos resultados. Nesse percurso, Bassanezi (2002), Chaves e Espírito Santo (2008), Burak (2016), Bertone, Bassanezi e Jafelice (2014) e Tambarussi (2026) não funcionam apenas como referências de enquadramento, mas como interlocutores para compreender a função didática de cada etapa.

A proposta busca favorecer uma aprendizagem em que derivadas, pontos críticos e máximos sejam compreendidos como instrumentos para analisar relações entre grandezas. Seu valor não depende da fidelidade quantitativa a um powertrain específico, mas da capacidade de articular rigor matemático, problematização e interpretação. Estudos futuros poderão investigar empiricamente como

estudantes mobilizam esses conceitos durante a atividade e quais dificuldades ou avanços conceituais emergem desse processo.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BERTONE, A. M. A.; BASSANEZI, R. C.; JAFELICE, R. S. M. **Modelagem Matemática**. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2014.

CHAVES, M. I. A.; ESPÍRITO SANTO, A. O. Modelagem Matemática: uma concepção e várias possibilidades. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 30, p. 149–161, 2008.

BURAK, D. Uma perspectiva de Modelagem Matemática para o ensino e a aprendizagem da Matemática. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (org.). **Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**. 2. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. p. 17–40.

TAMBARUSSI, C. M. Modos de compreender a Modelagem Matemática na Matemática Aplicada e na Educação Matemática. **Vestigare: Revista de Pesquisa em Educação, Ciências e Tecnologias**, Palotina, n. 2, p. 127–145, jan./jun. 2026. DOI: 10.5380/vrpect.2.102420.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

EHSANI, M.; GAO, Y.; LONGO, S.; EBRAHIMI, K. **Modern Electric, Hybrid Electric, and Fuel Cell Vehicles: Fundamentals, Theory, and Design**. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2018.

MOURA, J. B. **Derivadas aplicadas à potência de um veículo híbrido: torque, potência e otimização. Material didático de Cálculo Diferencial e Integral I**. Cuiabá: IFMT, 2026.