BOLETIM DE CONJUNTURA

POLINÔMIOS E AS RAÍZES ENÉSIMAS: UMA PERSPECTIVA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

POLYNOMIALS AND N-TH ROOTS: A PERSPECTIVE FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS

10.56238/bocav24n73-019

Data de submissão: 29/11/2025 **Data de publicação:** 29/12/2025

Róbson Lousa [1]

Resumo

Os polinômios constituem um dos pilares da educação matemática básica e avançada, sendo fundamentais tanto para a compreensão de funções quanto para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Entre os diversos caminhos para o estudo de suas raízes, destacam-se as raízes enésimas, que permitem ao estudante visualizar propriedades estruturais dos polinômios e conectar conteúdos de Aritmética, Álgebra e Números Complexos. Neste trabalho, apresentamos um estudo acessível sobre raízes enésimas, raízes da unidade e raízes primitivas da unidade, utilizando a Fórmula de Moivre como ferramenta central. A partir dessa abordagem, buscamos ampliar a compreensão conceitual e visual dos estudantes sobre polinômios, reforçando conexões importantes frequentemente pouco exploradas no Ensino Médio. Por meio de exemplos geométricos e algébricos, evidenciamos como as raízes enésimas constituem uma estratégia eficiente e motivadora para o ensino de polinômios.

Palavras-chave: Educação Matemática; Polinômios; Raízes Enésimas; Números Complexos; Ensino Médio.

Abstract

Polynomials are a central topic in both basic and advanced mathematics education, playing an essential role in the development of functional reasoning and algebraic thinking. Among the various approaches to studying their roots, nth roots stand out for enabling students to visualize structural properties of polynomials and to connect ideas from Arithmetic, Algebra, and Complex Numbers. In this paper, we present an accessible study of nth roots, roots of unity, and primitive roots of unity, using De Moivre's Formula as a key tool. This approach aims to expand students' conceptual and visual understanding of polynomials, strengthening important connections that are often underexplored in high school curricula. Through geometric and algebraic examples, we show that nth roots constitute an effective and motivating strategy for teaching polynomial structures.

Keywords: Mathematics Education; Polynomials; Nth Roots; Complex Numbers; High School Instruction.

1 INTRODUÇÃO

Os polinômios, ou funções polinomiais, ocupam um lugar central na Matemática escolar e universitária, sendo estudados há séculos e desempenhando papel fundamental na construção do pensamento algébrico. Entre suas propriedades mais conhecidas estão a continuidade em todo o domínio, a simplicidade de suas derivadas — frequentemente apresentadas no ensino médio pela chamada "regra do tombo" — e a relativa facilidade de representação gráfica, que permite descrever retas, parábolas e curvas de maior complexidade (LIMA et al.,

[1] Doutor em Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – câmpus Uruaçu.
E-mail: robson.lousa@ifg,edu.br Orcid: 0000-0002-5939-6463

1997). Um dos principais objetivos no estudo dos polinômios consiste em determinar suas raízes, isto é, os valores para os quais o polinômio se anula. Do ponto de vista geométrico, quando essas raízes são reais, elas correspondem aos pontos de interseção do gráfico da função polinomial com o eixo das abscissas.

Para além de seu interesse estritamente matemático, a investigação das raízes dos polinômios apresenta grande relevância didática. Em particular, o estudo das raízes enésimas oferece ao estudante a oportunidade de articular simultaneamente intuições algébricas e geométricas, aspecto essencial para uma aprendizagem significativa no Ensino Médio. Embora o ensino de polinômios permaneça um eixo estruturante da formação algébrica dos estudantes, observa-se que muitas de suas conexões conceituais, especialmente aquelas envolvendo números complexos, são frequentemente tratadas de forma fragmentada ou superficial (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2021).

Nesse contexto, as raízes enésimas constituem um recurso didático potente, pois permitem introduzir e explorar propriedades estruturais dos polinômios por meio de representações geométricas simples no plano complexo. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê o trabalho com números complexos no Ensino Médio (BRASIL, 2018); no entanto, a relação entre esses números e os polinômios raramente é explorada de maneira aprofundada, o que dificulta a construção de uma visão integrada dos conteúdos. Estratégias que favoreçam a visualização e a interpretação geométrica das raízes complexas mostram-se particularmente relevantes para superar essas dificuldades (BOGOMOLNY, 2020; SILVA; CARVALHO, 2021).

Do ponto de vista matemático, é sabido que as raízes reais representam apenas uma parte do conjunto de raízes possíveis de um polinômio. As demais raízes, em geral complexas, admitem uma representação natural no plano complexo, no qual a parte real corresponde ao eixo das abscissas e a parte imaginária ao eixo das ordenadas. Nesse cenário, as raízes enésimas surgem como soluções de uma classe particular de polinômios da forma $x^n = z$, em que zé um número complexo arbitrário. A partir da Fórmula de Moivre, obtém-se uma expressão explícita para essas raízes, permitindo não apenas sua determinação algébrica, mas também uma interpretação geométrica clara, como vértices de polígonos regulares inscritos em circunferências.

Neste trabalho, apresentamos um estudo introdutório e acessível sobre raízes enésimas, raízes da unidade e raízes primitivas da unidade, enfatizando suas relações com o estudo de polinômios. Optamos por apresentar essas raízes explicitamente como soluções de equações polinomiais, de modo a reforçar a conexão entre a Álgebra dos polinômios e a teoria dos números complexos. Inicialmente, na Seção 1, revisamos conceitos fundamentais sobre polinômios e enunciamos resultados clássicos, como o Teorema Fundamental da Álgebra. Na Seção 2, desenvolvemos o estudo das raízes enésimas e de suas propriedades geométricas, incluindo os casos particulares das raízes da unidade e das raízes primitivas. Por fim, na Seção 3, retomamos o estudo dos polinômios, relacionando-o às raízes enésimas por meio de exemplos que evidenciam o potencial dessa abordagem tanto do ponto de vista matemático quanto didático.

2 POLINÔMIOS

Para uma melhor formalização do estudo, vamos iniciar com uma definição formal de polinômios.

Definição 1: O conjunto dos símbolos para algum n inteiro não negativo

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

é dito *polinômio*. Os números complexos a_i são chamados *coeficientes*.

Temos aqui polinômios como sendo o conjunto de determinados símbolos, este conjunto, como ressalta Lang (2002) não é o mesmo que as funções em uma variável "x" chamada de *funções polinomiais* amplamente estudadas no ensino escolar, já que a noção de polinômio é mais ampla que a de funções, sendo que polinômios podem ser, por exemplo, estendidos a outros corpos que não os dos números complexos.

O inteiro não negativo n é dito o *grau* de um polinômio não nulo quando a_n é o maior coeficiente não nulo do polinômio, assim, um polinômio de grau zero é um número complexo, isto é, constante. Se $p(x)$ é um polinômio, o número αé uma *raiz* de $p(x)$ quando $p(\alpha) = 0$, neste caso, dizemos que α *satisfaz* (ou *resolve*) o polinômio $p(x)$.

Outro conceito que será de grande valia é o de *multiplicidade* de uma raiz, para tanto, vamos a sua definição.

Definição 2: O número natural m é dito a *multiplicidade* da raiz α do polinômio $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é fatorado como o produto $p(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x)$, em que α não é raiz de $q(x)$.

Quando $m > 1$, dizemos que α é uma raiz múltipla (ou de multiplicidade m). Quando nenhuma raiz de um polinômio possui multiplicidade maior que 1, temos que o polinômio se *fatora* em fatores lineares.

Temos inúmeros resultados importantes sobre polinômios e suas raízes. Resultados estes que auxiliam na solução dos polinômios. Através da Fórmula Resolvente de uma equação do segundo grau, por exemplo, é possível encontrar as raízes de qualquer polinômio de grau $n = 2$. Um resultado mais geral sobre o número de raízes de um polinômio é o

Teorema Fundamental da Álgebra: Um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas.

É importante ressaltar que o Teorema Fundamental da Álgebra "conta" a multiplicidade das raízes separadamente. Por isso, o polinômio x^n possui $\alpha = 0$ como a única raiz distinta, mas, por definição, $\alpha = 0$ é uma raiz de multiplicidade n, já que $x^n = (x-0)^n$, isto é, o polinômio x^n possui exatamente n raízes iguais a 0.

Ainda neste sentido, um outro resultado de grande importância para o estudo de polinômios é o fato de que se $z = a + bi$, um número complexo, é raiz de um polinômio, o seu conjugado, $\overline{z} = a - bi$, também o é. Assim, se encontramos uma raiz complexa não real de um determinado polinômio, na prática encontramos duas raízes deste polinômio, ela própria e o seu conjugado. Considerando esse resultado, observamos que se um polinômio possui grau ímpar, necessariamente ele terá pelo menos uma raiz real, tendo em vista que a quantidade de raízes complexas não real de um polinômio é par. Obviamente, por este resultado, não se pode fazer mais afirmações quanto a outras raízes.

Com essas definições e resultados até aqui, faremos uma pausa no estudo de polinômios para nos dedicarmos um pouco ao estudo de raízes enésimas. Na seção 3 voltaremos ao estudo de polinômios relacionando-o com as raízes enésimas que veremos agora.

3 RAÍZES ENÉSIMAS

Para a dedução da fórmula para raízes enésimas é conveniente começarmos pela Fórmula de Moivre. Abraham de Moivre nasceu no dia 26 de maio de 1667 em Vitry, França, entre muitas de suas contribuições para a matemática, temos a Fórmula de Moivre para números complexo. Tomando z um número complexo qualquer, ou seja, $z = a + bi$ em que a e b são números reais e $i^2 = 1$, por definição, ele é representado em sua forma polar por $z = r(cos\,\theta + isen\,\theta)$ em que $r = |z|$ e θ é o ângulo formado pelo vetor z e a parte positiva do eixo das abscissas. Da representação polar de um número complexo, temos

Fórmula de Moivre:

$(cos\,\theta + isen\,\theta)^n = cos\,(n\theta) + isen\,(n\theta).$ (2)

A partir dessa fórmula será deduzia uma fórmula para se encontrar as raízes enésimas e consequentemente as raízes dos polinômios da forma $x^n - a$, em que a não é necessariamente um número real. Para tanto, devemos iniciar com a definição de raízes enésimas que é, de certa forma, bastante natural.

Definição 3: Um número complexo z é dito raiz enésima de um número complexo a se, e somente se, $z^n = a$.

Seja $z = \rho(cos\,\theta + isen\,\theta)$ e $a = r(cos\phi + isen\,\phi)$ dois números complexos escritos em sua forma polar, fazendo uso da Fórmula de Moivre e aplicando a Definição 3, temos que

$$\rho^n(cos\,\theta + isen\,\theta)n = \rho^n(cos\,n\theta + isen\,n\theta) = r(cos\,\phi + isen\,\phi),$$

pela igualdade de dois números complexo – isto é, $a + bi = a' + b'i$ se, e somente se, $a = a'$ e $b = b'$ –, encontramos

$\rho^n = r,$ (3)

$cos\,n\theta = cos\,\phi,$ (4)

$\text{sen } n\theta = \text{sen } \phi$ (5)

e consequentemente temos que

$$n\theta = \phi + 2k\pi \qquad (6)$$

em que k é um número inteiro

Portanto, agora temos a fórmula da raiz enésima

$$Z = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + isen\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (7)$$

A partir dessa fórmula, podemos observar que há exatamente n raízes distintas, fazendo $k = 0, 1, \ldots, n-1$, pois, ao tomar outro valor arbitrário para k, encontraremos algum z obtido anteriormente a partir dos valores acima de k, devido a divisão de k por n na fórmula. Assim, temos que um número complexo $a \neq 0$ possui n raízes enésimas todas com o mesmo módulo $\rho = \sqrt[n]{|a|}$. Com esse fato, temos que, ao representar as raízes enésimas no plano complexo, elas são os vértices de um polígono regular de n arestas inscrito em uma circunferência de raio ρ. Assim, temos que a distância entre duas raízes enésimas consecutivas é sempre a mesma.

Exemplo 1: Para ilustrar, vamos procurar as raízes quádruplas de -16, ou seja, queremos encontrar z tal que $z^4 = -16$. Em outras palavras, estamos interessados em encontrar as raízes do polinômio $p(x) = x^4 + 16$.

Temos $\rho = 2$, $\phi = \pi$ (observe que $-16 = -16(cos\,\pi + isen\,\pi))$[2], portanto as raízes quádruplas de -16 são dadas por

$$z_k = 2\left(cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + \text{isen}\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), \qquad (8)$$

em que $k = 0, 1, 2, 3$.

Substituindo os valores de k e efetuando os cálculos algébricos, vemos que

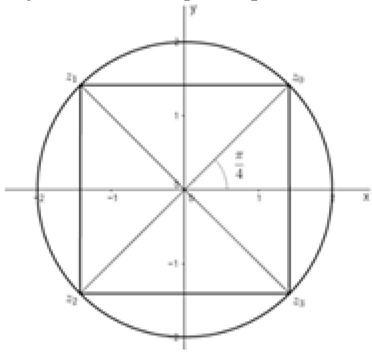
$$z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\ z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\ e\ z_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \qquad (9)$$

são as quatro raízes quádruplas[3] de -16 e, consequentemente, são as raízes de $p(x) = x^4 + 16$.

[2] O ângulo $\phi = \pi$ é o ângulo entre o vetor -16 (representado no plano complexo) e o semieixo positivo das abscissas. Assim sendo, -16 se encontra no semieixo negativo das abscissas, então o ângulo ϕ é o ângulo entre a parte positiva e parte negativa do eixo Ox, isto é, $\phi = \pi$.

[3] Observamos que, se tentássemos resolver $p(x)$ pelo método biquadrado (que será comentado em breve), teríamos que encontrar a raiz quadrada de $4i$ e encontrar as mesmas raízes, e, mesmo assim, teríamos que usar a fórmula que deduzimos aqui.

Figura 1 - Representação das raízes quádruplas de -16 no plano complexo



Fonte: autoria própria.

Na figura 1 temos a representação destas raízes no plano complexo, são elas, os vértices de um quadrilátero inscrito em uma circunferência de raio 2.

3.1 RAÍZES ENÉSIMAS DA UNIDADE

Em posse da definição de raízes enésimas, podemos particularizar este escopo para as raízes enésimas da unidade. Isto é,

Definição 4: As raízes enésimas da unidade são os números complexos z tais que a igualdade $z^n = 1$.

Ou seja, as raízes enésimas da unidade é o caso particular das raízes enésimas em que $\alpha = 1$. Assim, o ângulo ϕ assume valor zero, por $a = 1$ se tratar de um número real positivo, e, para tanto, temos que

$$z = z^{\frac{2k\pi i}{n}} = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}, \qquad (10)$$

em que $k = 0, 1, \dots, n-1$, são as n raízes enésimas da unidade. Observe que $\alpha = 1$ é sempre uma raiz enésima da unidade, já que $1^n = 1$ para qualquer n inteiro.

Comumente, as raízes enésimas da unidade são denotadas pela letra grega ω e, por consequência, as raízes enésimas primitivas da unidade (como será visto na próxima seção) também são assim denotadas. Utilizando esta notação e utilizando a Fórmula de Moivre, temos que as raízes enésimas da unidade são dadas por

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}. \qquad (11)$$

Consequentemente, representando essas raízes no plano complexo, temos que elas são os vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio 1. Para melhor ilustrar essa situação, vamos ao próximo exemplo.

Exemplo 2: Nossa intenção aqui é buscar as raízes óctuplas primitivas da unidade, ou seja, os valores de z tais que a igualdade $z^8 = 1$ seja válida. Utilizando a fórmula deduzida nesta seção, temos que

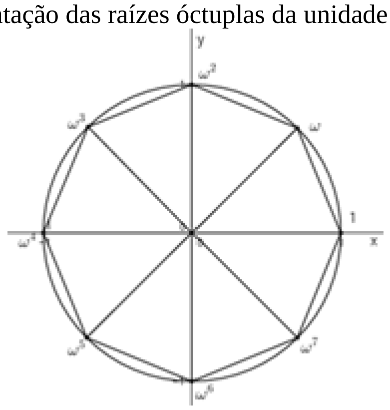
$\omega = \omega^{\frac{2\pi i}{8}} = cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ (12)

é uma raiz óctupla da unidade, e assim, as potências

$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^7$ (13)

são as 8 distintas raízes óctuplas primitivas da unidade. Na figura 2 temos a representação dessas raízes no plano complexo. São elas, os vértices do octógono regular inscrito na circunferência de raio 1. Vale ressaltar aqui que, para denotarmos uma raiz enésima da unidade por ω, tomamos k, que a priori assume qualquer valor inteiro, fixo.

Figura 2 - Representação das raízes óctuplas da unidade no plano complexo



Fonte: autoria própria.

Agora, fazendo um paralelo com o exemplo 1, temos que

$\omega = \omega^{\frac{2\pi i}{4}} = cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} = i$ (13)

é uma raiz quádrupla da unidade e, portanto,

$1, \omega, \omega^2, \omega^3$ (14)

são as 4 raízes quádruplas da unidade. Como z_0 é uma raiz quádrupla de -16, temos que

$z_0, z_0\omega, z_0\omega^2, z_0\omega^3$ (15)

são as raízes quádruplas de -16. A saber, $z_0\omega = z_1, z_0\omega_2 = z_2, e\ z_0\omega_3 = z_3$.

A generalização desse fato é de fácil constatação, pois, se z é uma raiz enésima de um número complexo a, temos que, por definição, $z^n = a$ e como as potências de ω são as raízes enésima da unidade, por definição, $(\omega_i)^n = 1$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Logo, $(z\omega_i)^n = z^n(\omega_i)^n = z^n = a$, ou seja, $z\omega_i$ são as n distintas raízes enésimas de a.

Contudo, devemos observar que se invés de ω tivéssemos tomado ω^2 para fazer o produto com z_0, embora satisfeita a condição de $(\omega^2)^4 = 1$, não conseguiríamos encontrar as raízes enésimas de -16 devido ao fato de que $(\omega^2)^2 = 1$, ou seja, existe $t < n = 4$ tal que $(\omega^2)^t = 1$. Portanto, não podemos tomar aleatoriamente qualquer raiz enésima da unidade para esse processo. Na próxima seção veremos quais destas raízes podem ser utilizadas.

Para finalizar esta seção, fazemos uma rápida observação quanto à representação das raízes quádruplas da unidade no plano complexo. Estas correspondem aos vértices do quadrado que estão localizados nos pontos $(0,1), (-1,0), (0,-1)\ e\ (1,0)$.

3.2 RAÍZES ENÉSIMAS PRIMITIVAS DA UNIDADE

Um caso mais particular das raízes enésimas são as raízes enésimas primitivas da unidade. Como o próprio nome sugere, essas raízes constituem também um subconjunto das raízes enésimas da unidade.

Definição 5: Uma raiz enésima da unidade ω é chamada de *raiz enésima primitiva da unidade* se n é o menor inteiro positivo tal que $\omega^n = 1$.

Assim, para qualquer inteiro k, o número

$$\omega = e^{\frac{2\pi i k}{n}} \qquad (16)$$

é uma raiz enésima primitiva da unidade se, e somente se, $\omega^m \neq 1$para todo $m < n$. Em particular, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ é a primeira raiz enésima primitiva da unidade que ocorre quando percorremos o círculo unitário no sentido anti-horário a partir da unidade real (ÁVILA, 2008).

Observando o caso das raízes quádruplas da unidade, temos que -1 e i são raízes primitivas, enquanto 1 não é uma raiz quádrupla primitiva da unidade, pois $1^1 = 1$. De modo análogo, no caso das raízes óctuplas da unidade, verifica-se que algumas delas são primitivas, enquanto outras não o são. Esses exemplos iniciais ajudam a delinear a caracterização das raízes enésimas primitivas da unidade.

Para aprofundar essa análise, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 3: Vamos encontrar as raízes quíntuplas da unidade. Para isso, tomamos

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}, \qquad (17)$$

que é uma raiz quíntupla da unidade. As potências

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4 \text{ e } \omega^5 = 1 \qquad (18)$$

correspondem às cinco raízes quíntuplas da unidade. Nesse caso, excetuando-se o número 1, que por definição não pode ser raiz primitiva, todas as demais raízes são primitivas.

A partir desse exemplo, podemos enunciar a caracterização geral das raízes enésimas primitivas da unidade.

Teorema: Uma raiz enésima da unidade $\omega = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ é primitiva se, e somente se, k e n são primos entre si. Consequentemente, se n é primo, o número de raízes enésimas primitivas da unidade é exatamente $n - 1$; caso contrário, esse número é menor que $n - 1$.

Como observado no caso das raízes quíntuplas da unidade, todas as raízes, exceto o próprio 1, são primitivas, totalizando quatro raízes primitivas. Já no caso das raízes óctuplas (ou quádruplas) da unidade, apenas aquelas para as quais ke $n$são coprimos são primitivas, e esse conjunto contém sempre mais de uma raiz.

De fato, se ω é uma raiz enésima primitiva da unidade, então $\omega^n = 1$ e $\omega^m \neq 1$ para todo inteiro positivo $m < n$. Suponhamos, por contradição, que ke $n$não sejam primos entre si. Nesse caso, existe um divisor comum $d > 1$ tal que $k = dk'$e $n = dn'$, o que implica

$$\omega^{n'} = e^{\frac{2\pi ik'}{n'}} = 1, \qquad (19)$$

contradizendo o fato de ω ser uma raiz primitiva. Portanto, k e n devem ser coprimos. A recíproca segue diretamente do fato de que, se não existe inteiro positivo $m < n$ tal que m seja múltiplo de n, então $\omega^m \neq 1$, o que garante que ω é uma raiz enésima primitiva da unidade.

3.2.1 A função φ de Euler e as raízes enésimas primitivas da unidade

A caracterização das raízes enésimas primitivas da unidade pode ser formulada de maneira mais precisa por meio da função φ de Euler. Recordemos que a função $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por Euler, associa a cada inteiro positivo n o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são coprimos com n. Em termos formais,

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n \text{ e } \gcd(k, n) = 1\}|. \qquad (20)$$

No contexto das raízes enésimas da unidade, essa função desempenha um papel central, pois o número de raízes enésimas primitivas da unidade é exatamente igual a $\varphi(n)$. De fato, se denotarmos por

$$\omega_k = e^{\frac{2\pi ik}{n}}, k = 0,1, \dots, n - 1, \qquad (21)$$

as $n$raízes enésimas da unidade, então ω_k é uma raiz enésima primitiva se, e somente se, k e n são coprimos. Assim, a quantidade de raízes primitivas coincide precisamente com o número de inteiros k nesse intervalo que satisfazem essa condição, o que justifica a igualdade entre o número de raízes primitivas e o valor de $\varphi(n)$.

Essa relação fornece uma interpretação geométrica particularmente rica da função de Euler. Enquanto, em contextos elementares, a função φ é frequentemente apresentada apenas como uma função aritmética, no estudo das raízes enésimas primitivas ela adquire um significado geométrico claro: o valor de $\varphi(n)$ corresponde ao número de vértices do polígono regular inscrito no círculo unitário que geram todas as demais raízes enésimas da unidade por meio de suas potências.

Do ponto de vista didático, essa conexão é especialmente relevante, pois permite ao estudante visualizar uma função clássica da Teoria dos Números em um contexto algébrico e geométrico concreto. Além disso, essa abordagem antecipa ideias centrais da Álgebra Abstrata, como os polinômios ciclotômicos e a estrutura dos grupos cíclicos, evidenciando que conceitos aparentemente distintos podem ser compreendidos de forma integrada já em níveis introdutórios do ensino.

4 POLINÔMIOS E AS RAÍZES ENÉSIMAS

Com nosso estudo sobre as raízes enésimas, podemos voltar ao estudo de polinômios e relacioná-los. Como podemos perceber, as raízes enésimas são raízes de uma classe particular de polinômios, os polinômios da forma $p(x) = x^n - a$, em que, fazendo um pequeno paralelo com a definição dada na primeira seção, temos $a_n = 1, a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0$ e $a_0 = a$. Observamos que em nossa definição, em acordo com Herstein (1975) e Hungerford (2012), por exemplo, os coeficientes a_i devem ser números reais[4], contudo, no estudo das raízes enésimas não é necessária esta particularidade, o coeficiente $a_0 = a$ pode ser um número complexo qualquer. Como vimos no Exemplo 1, procurar as raízes quádruplas de -16 era equivalente a encontrar a solução do polinômio $p(x) = x^4 + 16$.

Fazendo agora um paralelo com o Teorema Fundamental da Álgebra, podemos observar que após dedução da fórmula para encontrarmos as raízes enésimas chegamos ao mesmo resultado do Teorema, um polinômio de grau n possui exatamente n raízes, contudo, temos que para esta classe particular de polinômios as n raízes são sempre distintas (para $a \neq 0$), ou seja, não admite multiplicidade maior que 1 e consequentemente o polinômio $p(x) = x^n - a$ é completamente fatorado em fatores lineares.

Se a for um número real não negativo, é fácil encontrar pelo menos uma raiz real do polinômio $p(x)$, contudo, com as raízes enésimas temos algumas estratégias para encontrar as demais raízes deste polinômio, inclusive para qualquer valor complexo de a, tendo assim, a solução para essa classe importante de polinômios. No exemplo 1, é utilizado, propositalmente, justamente o contrário desta observação ($a < 0$) e isto nos mostrou que não houve nenhuma raiz real; geometricamente, isto implica que o gráfico da função não intercepta

[4] Em textos como Lang (2002), o conceito de polinômios é mais geral, tendo os coeficientes em um anel qualquer, não necessariamente nos reais. Herstein (1975) e Hungerford (2012) generalizam a noção dada para polinômios ao longo de seus respectivos estudos, Herstein (1975) de maneira implícita e Hungerford (2012) de maneira bastante explícita. Contudo, a definição apresentada neste trabalho foi escolhida por este estudo não exigir conhecimentos avançados em Álgebra.

o eixo das abscissas. Obviamente, como vimos na seção 1, esse fato só ocorre quando n é par! Tendo em vista que quando n é ímpar, existe pelo menos uma raiz real e consequentemente o gráfico intercepta o eixo das abscissas pelo menos uma vez.

O fato de que se $a < 0$ não possuir raiz real (no caso dessa classe em específico) está intimamente ligado à definição dessa classe, pois tempos que tal classe é composta por polinômios mônicos.

Definição 6: Um polinômio é dito *mônico* se, e somente se, o coeficiente a_n for 1.

O fato de os polinômios dessa classe serem mônicos garante que $a_n > 0$ e como o grau do polinômio deve ser par, temos que a concavidade sempre será voltada para cima. Agora, temos que a concavidade é voltada para cima, $a < 0$, consequentemente $a_0 > 0$, vemos que o gráfico de x^n, que possui exatamente a raiz 0 de multiplicidade n, é transladado a_0-unidades no eixo das ordenadas, ou seja, não há a possibilidade de interseção entre o gráfico e o eixo das abscissas, isto é, não há raízes reais.

Obviamente, dependendo do valor de a, os procedimentos aqui estudados não são a maneira mais conveniente a ser trabalhada e é justamente aqui onde nos deparamos com uma das belezas da matemática: a variedade de métodos para se chegar à solução, dando assim a possibilidade para que o matemático decida qual o método mais eficiente para ele.

Porém, temos mais que isso, seja $\omega \neq 1$ uma raiz enésima da unidade, temos que ela é raiz de $p(x) = x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$, tendo em vista que podemos decompor $x^{n-1} = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x + 1)$ e, como ω é uma raiz enésima da unidade, temos que o lado esquerdo da igualdade é igual a zero; por outro lado, $\omega - 1 = 0$, logo, ω é raiz do segundo fator do lado direito da igualdade. Estes polinômios são chamados de *ciclotômicos.*

Com o intuito de ampliar ainda mais a noção dos benefícios que temos ao estudar as raízes enésimas, vamos ao

Exemplo 4: Nosso objetivo agora não é mais encontrar alguma raiz enésima, vamos encontrar agora as raízes de $p(x) = x^4 + x^2 + 1$. A priori, não temos como aplicar as raízes enésimas para encontrar as soluções de $p(x)$, mas podemos aplicar o método biquadrado e utilizar a igualdade $y = x^2$, logo $p(x) = p(y) = y^2 + y + 1$, e temos, enfim, um polinômio de segundo grau que nos dá duas soluções para y, são elas:

$$y_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ e } y_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \qquad (22)$$

Poderíamos voltar ao valor de y e encontrar os quatro valores de x, contudo, se observarmos que $y_1 = \omega^3$ (raiz tripla da unidade) teremos um resultado interessante: temos que ω é a raiz tripla primitiva da unidade, isto é, $\omega^3 = 1$ e, ao mesmo tempo, é raiz de $p(y)$, ou seja, $p(\omega) = \omega^2 + \omega + 1 = 0$. As raízes de $p(x)$ são

$\pm\omega$ e $\pm\omega^2$. Isto é fácil de se verificar: $(\pm\omega)^4 + (\pm\omega)^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$ e $(\pm\omega^2)^4 +$

$(\pm\omega^2)^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$. Com este exemplo, podemos ver que as raízes enésimas podem auxiliar-nos na solução de polinômios que vão além dos polinômios da forma $p(x) = x^n - a$ e também mostra um pouco da importância das raízes enésimas para o estudo de polinômios. Em Álgebra, no estudo da Teoria de Galois, elas também desempenham, um papel de grande importância, principalmente ao relacionarmos elas com a função φ de Euler.

4 CONCLUSÃO

O estudo dos polinômios ocupa posição de destaque na Matemática escolar e universitária, tanto por sua relevância teórica quanto por seu papel formativo no desenvolvimento do pensamento algébrico. Entre os diversos resultados associados a esse tema, o Teorema Fundamental da Álgebra estabelece que todo polinômio de grau $n$admite exatamente $n$raízes complexas, contadas com suas multiplicidades. No caso particular dos polinômios da forma $x^n = z$, o estudo das raízes enésimas permite ilustrar de maneira explícita esse resultado, evidenciando que tais polinômios possuem $n$raízes distintas, fato que decorre diretamente da expressão obtida a partir da Fórmula de Moivre.

A dedução da fórmula das raízes enésimas não apenas fornece um método algébrico para a determinação dessas raízes, mas também possibilita uma interpretação geométrica clara no plano complexo. As raízes enésimas de um número complexo são representadas como os vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência, o que evidencia propriedades como a igualdade das distâncias entre raízes consecutivas e a distribuição simétrica dessas soluções. Essa interpretação contribui significativamente para a compreensão conceitual das soluções complexas de equações polinomiais, frequentemente percebidas como abstratas pelos estudantes.

Ao considerar as raízes da unidade e, de forma mais específica, as raízes enésimas primitivas da unidade, ampliam-se as possibilidades de aplicação desse estudo, tanto no contexto dos polinômios quanto em áreas mais avançadas da Matemática, como a Álgebra Abstrata e a Teoria de Galois. A caracterização das raízes primitivas, associada à coprimalidade entre os inteiros envolvidos, permite estabelecer conexões com a função φ de Euler e com os polinômios ciclotômicos, enriquecendo o panorama conceitual apresentado.

Do ponto de vista didático, os exemplos discutidos ao longo do trabalho mostram que o estudo das raízes enésimas pode ser utilizado não apenas para resolver polinômios da forma $x^n = z$, mas também como ferramenta auxiliar na análise de equações polinomiais mais gerais. Ainda que, em determinados casos, outros métodos sejam mais eficientes para a obtenção das raízes, a abordagem por meio das raízes enésimas destaca-se por seu potencial formativo, ao articular álgebra, geometria e visualização no plano complexo.

Diante do exposto, conclui-se que o estudo das raízes enésimas constitui uma ponte natural entre conteúdos tradicionalmente apresentados de forma fragmentada no Ensino Médio, favorecendo uma compreensão mais integrada dos polinômios e dos números complexos. Ao explorar simultaneamente aspectos algébricos e geométricos, essa abordagem contribui para tornar o ensino de polinômios mais intuitivo, visual e conceitualmente consistente, além de oferecer ao professor um recurso didático valioso para enriquecer práticas pedagógicas e estimular investigações matemáticas em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Ministério da Educação, 2018.

BOGOMOLNY, A. **Cut the Knot – Interactive Mathematics**. Springer, 2020.

HERSTEIN, I. N. **Topcs in Algebra**. Chicago: John Wiley & Sons, 1975.

HUNGERFORD, T. W. **Abstract Algebra:** an introduction. Stamfor: Brooks Cole, 2012.

LANG, S. **Algebra**. New Haven: Springer, 2002.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Vol. 3. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; BRANCO, N. **O Ensino da Álgebra no Século XXI**. Springer, 2021.

SILVA, R.; CARVALHO, A. Representações e Visualização no Ensino de Matemática. **Revista Bolema**, 2021.